ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE 1978

1ère INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA – *Les six questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Sujet n° 1

Calculer selon la parité de n ,

$$U_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} \operatorname{cotg}\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$$

n étant un entier naturel non nul,

x un réel donné positif et distinct de $\frac{k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$)

(On pourra utiliser le produit des zéros d'un polynôme de la forme $(1+z)^n = A(1-z)^n$).

Sujet n° 2

1° Vérifier que l'équation différentielle

$$(E) \quad n(n-1)\,y - (x^2-1)\,y'' = 0$$

dans laquelle n est un entier $\geqslant 2$, admet pour intégrale particulière le polynôme de degré n

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_{n-p}\,x^{n-p} + \ldots + a_0 .$$

Pour cela calculer a_{n-p} en fonction de n et p .

2° Quelle est la somme des cœfficients du polynôme $P_n(x)$?

En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{q=1}^{q=\lambda} (-1)^q \frac{C_n^{2q}\,C_{n-1}^{q}}{C_{2n-2}^{2q}}$$

λ étant la partie entière de $\frac{n}{2}$.

3° Montrer que $P_n(x)$ a toutes ses racines réelles et comprises dans l'intervalle $(-1, +1)$, séparées par les racines de $P'_n(x)$.

.../...

Sujet n° 3

Dans un repère orthonormé Oxyz on considère sur la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ le domaine Σ défini par

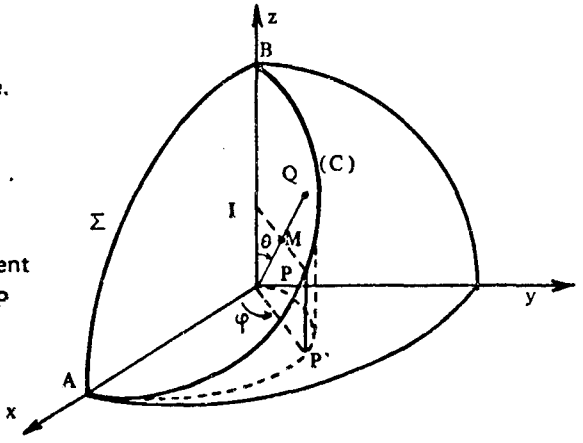
$$x^2 + y^2 - x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad z \geqslant 0$$

et on désigne par (C) la courbe qui délimite Σ sur la sphère.

D'autre part soit Σ_1 la surface engendrée par les segments de droites parallèles au plan xOy et rencontrant Oz et (C).

Calculer le volume V délimité par Σ et Σ_1.

(on pourra utiliser la figure ci-contre où M et Q appartiennent respectivement à Σ_1 et Σ et vérifier que pour le point P de (C) ses coordonnées sphériques θ et φ sont telles que $\cos \varphi = \sin \theta$)



Sujet n° 4

On considère la fonction réelle f de la variable réelle a définie par

$$f(a) = \int_0^{\pi} \frac{a x \sin x \, dx}{1 + a^2 - 2a \cos x}$$

1° Pour quelles valeurs de a est-elle définie ?
Pour quelles valeurs de a est-elle continue ?

2° Etablir une relation entre f(a) et $g(a) = \int_0^{\pi} \text{Log}(1 + a^2 - 2a \cos x) \, dx$.
Montrer que l'on a $g(a) = g(-a)$ et $g(a^2) = 2g(a)$.

3° Calculer g(a) puis f(a).

Sujet n° 5

Calculer la somme de la série

$$U_n = \text{Arc tg} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} \qquad (n \geqslant 0)$$

(On pourra mettre $\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}$ sous la forme $\frac{p - q}{1 + pq}$).

Sujet n° 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la topologie des intervalles ouverts) vérifiant l'hypothèse

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad]a,b[\cap A \text{ est une partie finie de } \mathbb{R}.$$

Montrer que A est fermé et que tout point de A est isolé (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de ce point ne contenant que ce point de A.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail